Ορισμός 1: Θα λέμε ότι η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο $S \subseteq D_f$ με σταθ. $k \geq 0$, εάν:
$$\| f(x, \bar{y}_1) - f(x, \bar{y}_2) \| \leq k \cdot \| \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \| \quad , \forall (x, \bar{y}) \in \nu S$$

Ορισμός 2: Εάν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \bar{y})$, $i = 1, 2, \dots, n$ υπάρχουν στο S και είναι φραγμένες και συνεχείς, τότε η f είναι k-Lipschitz με $k = \max\{k_1, k_2\}$ και
$$\left| \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y_i} \right| \leq k_i \, , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (ΥΠΑΡΞΗΣ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΥ)

Ας είναι $a, \beta > 0$ και τέτοιοι ώστε
$R = \{(x, y) \in D_f : |x - x_0| \leq a \ \& \ |y - y_0| \leq \beta\} \subseteq D_f$
Εάν η f είναι k-Lipschitz και συνεχής, τότε το Π.Α.Τ των εξισώσεων $\bar{y}' = f(x, \bar{y})$ και $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ έχει ακριβώς μια λύση $\bar{y}$ που ορίζεται στο διάστημα $[\bar{x}_0 - r, \bar{x}_0 + r]$ με $r = \min\{a, \frac{\beta}{M}\}$ και $M = \max_{(x, \bar{y}) \in R} \| f(x, \bar{y}) \|$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών
$y' = x^2 + y^2$ με $y(0) = 0$

ΛΥΣΗ

Έστω $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 0| \leq a$ και $|y - 0| \leq \beta\} \subseteq \mathbb{R}^2$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a$ και $|y| \leq \beta\}$

Έστω επίσης $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ συνεχής

Εξετάζω αν η f είναι k-Lipschitz (Ορισμός 2)

$$\max_{(x, y) \in R} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = |2y| = 2|y| \leq 2\beta$$

Άρα, η f 2β-Lipschitz στο $\mathbb{R}^2$

Έτσι από Θεώρημα 1

$\exists!$ y λύση που ορίζεται στο $[-r, r]$, $r = \min\{a, \frac{\beta}{M}\}$
με $M = \max_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |f(x, y)| = \max_{\substack{|x| \leq a \\ |y| \leq b}} |x^2 + y^2| = a^2 + \beta^2 \longrightarrow$

2) ΝΔΟ το π.Α.τ

$y' = x + y^2$ με $y(0) = 0$

έχει ακριβώς μια λύση στο $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

ΛΥΣΗ

Έστω συνάρτηση $f(x,y) = x + y^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Θεωράμε το σύνολο

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a$ και $|y| \leq \beta\}$ Θεωρώ $a = \frac{1}{2}$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{1}{2}$ και $|y| \leq \beta\}$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, επίσης:

$$\max_{(x,y) \in R} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = |2y| = 2|y| \leq 2\beta$$

Άρα, η f 2β-Lipschitz

Επομένως, από Θεώρημα 1

$\exists!$ y λύση της εξίσωσης στο $[-r, r]$

με $r = \min\{a, \frac{\beta}{M}\}$ και $M = \max_{(x,y) \in R} \left\{\frac{1}{2}, \beta/(\frac{1}{2} + \beta^2)\right\}$

Επιλέγοντας:

$\beta = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}$, έχουμε $r = \frac{1}{2}$

Άρα,

$\exists!$ y λύση στο $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3) ΝΔΟ οι παρακάτω συναρτήσεις πληρούν το Κριτήριο του Lipschitz. (Βάση του ορισμού 2)

i) $g(x,y) = \sin y + y\cos x$, $R = \{(x,y) : |x| \leq 1 \ \& \ |y| \leq 2\}$

ii) $g(x,y) = x^2 \cdot \mathrm{Arctan}\, y + e^x$, $R = \{(x,y) : |x| \leq 2$, y αυθαίρετο$\}$

iii) $g(x,y_1,y_2) = (x^2 + y_1^2, x^2 \cdot e^{x+y_2})^T$, $R = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y_1| + |y_2| \leq 1\}$

iv) $g(x,y_1,y_2) = (e^x + \sin y_1, x\,\mathrm{Arctan}\, y_2 + \cos y_1)^T$, $R = \{(x,y) : |x| \leq 1$, y_1 & y_2 αυθ$\}$

ΛΥΣΗ

• Γενικά πρωτού λύσει η άσκηση να έχουμε στο νου μας 2 πράγματα:

$1^{ον}$) $R = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a \ \& \ |y - y_0| \leq b\} \subseteq D_g$

Εάν $\exists \frac{\partial g}{\partial y_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ και μάλιστα συνεχείς στο R

τότε:

$$k = \max_{(x,y) \in R} \left| \frac{\partial g}{\partial y_k} \right|$$ και η g k-Lipschitz

2ον) $R = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a$ και y : αυθαίρετο$\} \subseteq D_g$

Εαν $\exists \frac{\partial g}{\partial y_k}$ $(k=1,\dots,n)$ και μάλιστα συνεχείς στο R

τοτε

$$k = \sup_{(x,y)\in R} \left|\frac{\partial g}{\partial y_k}\right| \quad \text{και η } g \text{ } k\text{-Lipschitz}$$

(ενώ το $k \equiv$ supremum της $\frac{\partial g}{\partial y_k}$ διότι το y παίρνει ότι τιμές θέλει άρα δεν υπάρχει ανώτατο φράγμα (μέγιστο) συνεπώς αναγκαστικά είναι το supremum)

i) $$k = \max_{(x,y)\in R} \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| = \max_{(x,y)\in R} |\cos y + \cos x| = 2$$

Άρα, η g είναι 2-Lipschitz

ii) $$k = \sup_{(x,y)\in R} \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| = \sup_{(x,y)\in R} \left|x^2/1+y^2\right| = 4$$

Άρα, η g είναι 4-Lipschitz

iii) $$k_1 = \max_{(x,y_1,y_2)\in R} \left|\frac{\partial g}{\partial y_1}(x,y_1,y_2)\right| = \max_{(x,y_1,y_2)\in R} \left|(2y_1, 0)^T\right| = 2$$

$$k_2 = \max_{(x,y_1,y_2)\in R} \left|\frac{\partial g}{\partial y_2}(x,y_1,y_2)\right| = \max_{(x,y_1,y_2)\in R} \left|(0, x^2 \cdot e^{x+y_2})\right| = e^2$$

με $k = \max\{k_1, k_2\} = \max\{2, e^2\} = e^2$-Lipschitz

iv) $$k_1 = \sup_{(x,y_1,y_2)\in R} \left|\frac{\partial g}{\partial y_1}(x,y_1,y_2)\right| = \sup_{(x,y_1,y_2)\in R} \left|(\cos y_1, -\sin y_1)^T\right| =$$

$$= \sup_{(x,y_1,y_2)\in R} (|\cos y_1| + |\sin y_1|) = \sqrt{2}$$

$$k_2 = \sup_{(x,y_1,y_2)\in R} \left|\frac{\partial g}{\partial y_2}(x,y_1,y_2)\right| = \sup_{(x,y_1,y_2)\in R} \left|(0, x/1+y_2^2)\right| = 1$$

$k = \max\{k_1, k_2\} = \max\{\sqrt{2}, 1\} = \sqrt{2}$-Lipschitz